

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

MATHEMATICAL MODELING, SYSTEMS ANALYSIS

УДК 535.3; 531.1

DOI [10.17150/1993-3541.2015.25\(3\).526-532](https://doi.org/10.17150/1993-3541.2015.25(3).526-532)

А. В. БОРОВСКИЙ

*Байкальский государственный университет
экономики и права,
г. Иркутск, Российская Федерация*

А. Л. ГАЛКИН

*Институт общей физики РАН им. А. М. Прохорова,
г. Москва, Российская Федерация*

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСКОРЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ФОКУСЕ УЛЬТРАКОРОТКОГО ЛАЗЕРНОГО ИМПУЛЬСА С ПРИМЕНЕНИЕМ УСРЕДНЕННОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ

Аннотация. В статье рассмотрено ускорение электронов коротким, но достаточно протяженным лазерным импульсом при его фокусировке в газ. Такие импульсы могут содержать 100 и более колебаний лазерного поля, и их длительности простираются в диапазоне $t_L \geq 10^{-13}$ с. Предложен метод усреднения действия Гамильтона–Якоби для электронного газа. Получено усредненное релятивистское уравнение Гамильтона–Якоби для действия в гауссовом лазерном пучке с линейной поляризацией, представленное в эйлеровой и лагранжевой постановках. При рассмотрении лагранжевой постановки получено аналитическое выражение для релятивистской пондеромоторной силы, действующей на электрон, в эйлеровой постановке усредненное релятивистское уравнение Гамильтона–Якоби решено численно в рамках T2D задачи. Вычислено пространственно-двумерное распределение модуля импульса электронного газа, ускоренного в гауссовом фокусе линейно-поляризованного лазерного излучения.

Ключевые слова. Ускорение электронов ультракоротким лазерным импульсом; усредненное релятивистское уравнение Гамильтона–Якоби; релятивистская пондеромоторная сила.

Информация о статье. Дата поступления 27 февраля 2015 г.; дата принятия к печати 23 марта 2015 г.; дата онлайн-размещения 30 июня 2015 г.

A. V. BOROVSKY

*Baikal State University of Economics and Law,
Irkutsk, Russian Federation*

A. L. GALKIN

*General Physics Institute of RAS n.a. A.M. Prokhorov,
Moscow, Russian Federation*

NUMERICAL SIMULATION OF ELECTRONS ACCELERATION IN THE FOCUS OF AN ULTRASHORT LASER PULSE WITH THE AVERAGED RELATIVISTIC HAMILTON–JACOBI EQUATION USE

Abstract. The article considers electrons acceleration by a short, but rather long laser pulse under gas focusing. Such pulses may contain 100 or more laser field oscillations and spread in the range $t_L \geq 10^{-13}$ s. The method intended for averaging the Hamilton–Jacobi action for electron gas is offered. An averaged relativistic Hamilton–Jacobi equation for the action in the Gaussian laser beam with linear polarization represented in Euler’s and Lagrange’s formulations is determined. Proceeding from Lagrange’s formulation, the analytical expression for the relativistic ponderomotive force influencing the electron is obtained. In Euler’s formulation the averaged relativistic Hamilton–Jacobi equation is solved numerically within T2D task. Space two-dimensional distribution of the model of impulse of electron gas, accelerated in the Gaussian focus of linearly polarized laser radiation, is calculated.

Keywords. Electron acceleration by a short laser pulse; averaged relativistic Hamilton–Jacobi equation (ARHJ); relativistic ponderomotive force.

Article info. Received February 27, 2015; accepted March 23, 2015; available online June 30, 2015.

A. V. BOROVSKY, A. L. GALKIN

Одной из проблем, привлекающих внимание исследователей в настоящее время, является ускорение электронов в фокусе ультракоротких лазерных импульсов. На этом пути можно получать электроны с кинетической энергией 1 МэВ и выше, что представляет интерес для применений в нанoeлектронике. На электрон, осциллирующий в сильном поле, действует стрикционная (пондеромоторная) сила, выталкивающая его в область более слабого поля. В процессе своего движения электрон ускоряется. Движение электрона является релятивистским. Это обстоятельство усложняет решение задачи.

Данная работа является продолжением исследования, начатого в статье «Математические модели, основанные на релятивистском уравнении Гамильтона-Якоби в лазерной физике» [3], там же приведена большая часть библиографии. В исходной статье рассмотрено волновое уравнение Дирака и его классический предел — уравнение релятивистское Гамильтона-Якоби (РГЯ), а также показано, что для изучения ускорения электронов в фокусе лазерных импульсов достаточно использовать указанное уравнение. Это уравнение для случая гауссова лазерного импульса и линейной поляризации излучения в системе единиц измерений $c = 1, e = 1$ имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + 2A_x \frac{\partial S}{\partial x} + 2A_z \frac{\partial S}{\partial z} = \\ = m^2 + (A_x)^2 + (A_z)^2; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\nabla S = \mathbf{p} + \mathbf{A}; \quad \varepsilon = \frac{\partial S}{\partial t},$$

где $S(t, \mathbf{r})$ — функция действия; $\mathbf{p}(t, \mathbf{r})$ — векторная функция импульса; $\varepsilon(t, \mathbf{r})$ — энергия электронов; $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ — векторный потенциал электромагнитного поля.

Для гауссова лазерного импульса с линейной поляризацией излучения векторный потенциал обладает двумя компонентами: поперечной, перпендикулярной оси, — A_x , и продольной, направленной вдоль оси лазерного импульса, — A_z :

$$A_x = A_0 \frac{\rho_0}{\rho} e^{-\frac{r^2}{\rho^2}} \sin(\varphi_g) = A_x^0 \sin(\varphi_g);$$

$$A_z = 2A_0 \epsilon \frac{x\rho_0}{\rho^2} e^{-\frac{r^2}{\rho^2}} \cos(\varphi_g^{(1)}) = A_z^0 \cos(\varphi_g^{(1)});$$

$$\varphi_g = \omega t - kz + \arctg\left(\frac{z}{z_R}\right) - \frac{zr^2}{z_R\rho^2} - \varphi_0; \quad (2)$$

$$\varphi_g^{(1)} = \varphi_g + \arctg\left(\frac{z}{z_R}\right),$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; λ — длина волны излучения; $\rho = \rho_0 \sqrt{1 + z^2/z_R^2}$, $z_R = \pi\rho_0^2/\lambda$ — рэлеевская длина; ρ_0 — поперечный размер минимальной гауссовой перетяжки в фокальной плоскости; φ_0 — значение фазы в момент времени $t = 0$, в точке $z = 0$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; ϵ — малый параметр.

Уравнение (1) представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка параметрического типа с вынуждающей силой. Исследование данного уравнения можно разделить на два случая в зависимости от длительности лазерного импульса t_L . Для длинных импульсов, длительность которых условно превышает 100 колебаний лазерного поля $t_L\omega/2\pi \geq 100$, справедлива концепция пондеромоторной силы, предложенная П. Л. Капицей в 1951 г. для механических систем с высокочастотной вынуждающей силой [4, с. 119]. В нашем случае механической системой является электрон, а высокочастотную силу создает внешнее электромагнитное поле лазерного импульса.

Для более коротких лазерных импульсов с длительностью $t_L\omega/2\pi \leq 10$ концепция пондеромоторной силы теряет свою силу, и для решения задачи следует рассматривать строгое уравнение РГЯ в лагранжевой постановке, которое принимает вид уравнения движения для электрона под воздействием силы Лоренца с учетом релятивистских эффектов.

Далее рассмотрим первый случай, в рамках которого можно усреднить уравнение РГЯ и получить выражение для пондеромоторной силы, действующей на электрон внутри лазерного импульса релятивистской интенсивности. Отметим, что концепция П. Л. Капицы использовалась в ряде работ, например, при изучении колебаний молекул в оптических полях [1] и применительно к лазерному импульсу [6].

1. Усреднение уравнения РГЯ. Уравнение (1) содержит постоянные и осциллирующие члены, поэтому его решение можно представить в виде постоянной S_0 (усредненной по высокочастотным осцилляциям электромагнитного поля) и осциллирующей ΔS частей. Осциллирующая часть должна содержать гармоники в силу нелинейности уравнения:

$$S = S_0 + \Delta S; \quad (3)$$

$$\Delta S = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta S_n \sin(n\omega t + \alpha_n).$$

Здесь амплитуды имеют n -й порядок малости при условии отсутствия резонансов.

Подстановка в уравнение (1) дает следующий результат:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial S_0}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_0}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_0}{\partial z}\right)^2 + \\ & + 2A_x \frac{\partial S_0}{\partial x} + 2A_z \frac{\partial S_0}{\partial z} + \\ & + \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial z}\right)^2 + \\ & + 2A_x \frac{\partial \Delta S}{\partial x} + 2A_z \frac{\partial \Delta S}{\partial z} + \\ & + 2 \frac{\partial S_0}{\partial t} \frac{\partial \Delta S}{\partial t} - 2 \frac{\partial S_0}{\partial x} \frac{\partial \Delta S}{\partial x} - 2 \frac{\partial S_0}{\partial y} \frac{\partial \Delta S}{\partial y} - 2 \frac{\partial S_0}{\partial z} \frac{\partial \Delta S}{\partial z} = \\ & = m^2 + (A_x)^2 + (A_z)^2. \end{aligned}$$

После усреднения по периоду лазерного поля выпадут слагаемые

$$\begin{aligned} & 2A_x \frac{\partial S_0}{\partial x}, \quad 2A_z \frac{\partial S_0}{\partial z}, \quad 2 \frac{\partial S_0}{\partial t} \frac{\partial \Delta S}{\partial t}, \\ & 2 \frac{\partial S_0}{\partial x} \frac{\partial \Delta S}{\partial x}, \quad 2 \frac{\partial S_0}{\partial y} \frac{\partial \Delta S}{\partial y}, \quad 2 \frac{\partial S_0}{\partial z} \frac{\partial \Delta S}{\partial z}, \end{aligned}$$

так как они содержат синусы и косинусы в первой степени. Усреднение следующих двух слагаемых дает

$$\begin{aligned} \left\langle 2A_x \frac{\partial \Delta S}{\partial x} \right\rangle &= \cos(\alpha_1 - \varphi_1) A_x^0 \frac{\partial \Delta S_1}{\partial x}; \\ \left\langle 2A_z \frac{\partial \Delta S}{\partial z} \right\rangle &= \sin(\alpha_1 - \varphi_1^{(1)}) A_z^0 \frac{\partial \Delta S_1}{\partial z}, \end{aligned}$$

здесь

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -kz + \arctg\left(\frac{z}{z_R}\right) - \frac{zr^2}{z_R \rho^2} - \varphi_0; \\ \varphi_1^{(1)} &= \varphi_1 + \arctg\left(\frac{z}{z_R}\right), \end{aligned}$$

где $\varphi_1, \varphi_1^{(1)}$ — части фаз в выражении (2), не зависящие от времени; α_1 — постоянная фаза в формуле (3); ΔS_1 — амплитуда колебаний на основной частоте. Первое слагаемое имеет первый порядок малости, второе слагаемое — следующий порядок малости, так как компонента A_z^0 — мала.

Усреднение квадратичных слагаемых дает

$$\left\langle \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial t}\right)^2 \right\rangle = \omega^2 \frac{1}{2} (\Delta S_1)^2;$$

$$\left\langle \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial z}\right)^2 \right\rangle = k^2 \frac{1}{2} (\Delta S_1)^2;$$

$$\left(\frac{\partial \Delta S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial r}\right)^2;$$

$$\left\langle \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial r}\right)^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta S_1}{\partial r}\right)^2,$$

разность —

$$\left\langle \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial t}\right)^2 \right\rangle - \left\langle \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial z}\right)^2 \right\rangle = (\omega^2 - k^2) \frac{1}{2} (\Delta S_1)^2 = 0,$$

в силу дисперсионного соотношения (для вакуума)

$$\omega^2 - k^2 = 0.$$

В результате приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial S_0}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_0}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_0}{\partial z}\right)^2 = \\ & = m^2 + \frac{1}{2} (A_x^0)^2 + \frac{1}{2} (A_z^0)^2 - \cos(\alpha_1 - \varphi) A_x^0 \frac{\partial \Delta S_1}{\partial x} + \\ & + \sin(\alpha_1 - \varphi_1^{(1)}) A_z^0 \frac{\partial \Delta S_1}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Последние два слагаемых в правой части уравнения (4) представляют собой малые поправки, условие их малости

$$\frac{\Delta S_1}{r_{\perp}} \ll A_x^0,$$

Слагаемое $1/2(A_z^0)^2$ для гауссова пучка также мало. В результате приходим к усредненному релятивистскому уравнению Гамильтона–Якоби (УРГЯ), не содержащему малых поправок

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial S_0}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_0}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_0}{\partial z}\right)^2 = \\ & = m^2 + \frac{1}{2} (A_x^0)^2; \end{aligned} \quad (5)$$

$$A_x^0 = A_0 \frac{\rho_0}{\rho} e^{-\frac{r^2}{\rho^2}};$$

$$\rho = \rho_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}.$$

Поскольку правая часть уравнения (5) цилиндрически симметрична (зависит от поперечных координат x, y в комбинации $r = \sqrt{x^2 + y^2}$), то уравнение (5) также является цилиндрически симметричным

A. V. BOROVSKY, A. L. GALKIN

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_0}{\partial z}\right)^2 =$$

$$= m^2 + \frac{(A_0(z-t)\rho_0)^2}{2\rho^2} e^{-\frac{2r^2}{\rho^2}}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial r} = p_{0\perp}; \quad \frac{\partial S_0}{\partial z} = p_{0\parallel}; \quad \frac{\partial S_0}{\partial t} = \varepsilon_0.$$

Амплитуда $A_0(\xi)$ описывает огибающую импульса. В данной постановке это медленная зависимость. Интересным является тот факт, что уравнение (6) не зависит от поляризации линейно-поляризованной волны. Такая зависимость возникает только при учете малых осцилляционных поправок. Предложенный метод назовем «методом усреднения действия Гамильтона-Якоби в лазерном поле».

2. Начальные и граничные условия. Уравнение (6) описывает плавное дрейфовое движение электронов. Рассмотрим случай, когда электроны перед лазерным импульсом покоятся. К уравнению (6) можно поставить нулевое начальное условие по времени, поскольку энергия и импульс начального электрона малы. Если расчет начинается в момент $t = 0$, то перед прохождением лазерного импульса

$$S_0(0, r, z) = 0.$$

Равняться нулю также должны компоненты импульса:

$$\frac{\partial S_0}{\partial r}(0, r, z) = p_{0\perp}(0, r, z) = 0;$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial z}(0, r, z) = p_{0\parallel}(0, r, z) = 0.$$

Электрон на оси не может обладать поперечным импульсом, так как он приобретает под воздействием пондеромоторной силы. При этом электрон уходит с оси

$$\frac{\partial S_0}{\partial r}(t, 0, z) = p_{0\perp}(r = 0) = 0.$$

За пределами лазерного импульса электрон покоится (имеет малый физический импульс по условиям данного пункта), поэтому

$$\frac{\partial S_0}{\partial z}(t, r, z \rightarrow \pm\infty) = p_{0\parallel}(z \rightarrow \pm\infty) = 0;$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial r}(t, r \rightarrow +\infty, z) = p_{0\perp}(r \rightarrow +\infty) = 0.$$

Можно также рассматривать ненулевые начальные условия.

3. Подготовка уравнения (6) к численному моделированию. Возвращаясь к размерным константам, запишем

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S_0}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_0}{\partial z}\right)^2 =$$

$$= m^2 c^2 + \frac{e^2 (A_0(\xi)\rho_0)^2}{c^2 2\rho^2} e^{-\frac{2r^2}{\rho^2}};$$

$$\xi = ct - z.$$

Обозначим

$$\tau = ct,$$

обезразмерим r, z, τ на поперечную гауссову перетяжку

$$\tilde{r} = \frac{r}{\rho_0}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{\rho_0}, \quad \tilde{\tau} = \frac{\tau}{\rho_0},$$

а действие на величину mcr_0 —

$$\tilde{S} = \frac{S_0}{mcr_0}.$$

Используем формулу (12) из статьи [3] и запишем выражение

$$A_0(\xi) = \sqrt{2} \frac{mc^2}{e} \sqrt{\alpha}, \quad \alpha = \frac{I_0(\xi)}{I_r}.$$

В результате получим обезразмеренное УРГЯ

$$\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{\tau}}\right)^2 - \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{r}}\right)^2 - \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{z}}\right)^2 =$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{1 + \beta \tilde{z}^2} e^{-\frac{2\tilde{r}^2}{1 + \beta \tilde{z}^2}} \cdot e^{-\frac{(\tilde{\tau} - \tilde{z} - \tilde{z}_L)^2}{\tilde{x}_L^2}}; \quad (7)$$

$$\alpha = \frac{I_0}{I_r}; \quad \beta = \left(\frac{\rho_0}{z_R}\right)^2; \quad \tilde{x}_L = \frac{t_L c}{\rho_0},$$

где \tilde{z}_L — начальное смещение максимума лазерного импульса относительно фокальной перетяжки; I_r — релятивистская интенсивность (см.: [3]). Используя выражение для рэлеевской длины, можно также записать

$$\beta = \left(\frac{\lambda}{\pi \rho_0}\right)^2.$$

Вторая экспонента в уравнении (7) определяет гауссову форму лазерного импульса по времени.

4. Уравнение, описывающее ускорение электронов вдоль оси лазерного пучка. Можно использовать УРГЯ также для описания ускорения электронов вдоль оси Oz. Для этого

MATHEMATICAL MODELING, SYSTEMS ANALYSIS

в правой части уравнения (7) следует положить $\tilde{r}=0$, а слева опустить производную $\partial\tilde{S}/\partial\tilde{r}=0$, получим выражение

$$\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\tilde{t}}\right)^2 - \left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\tilde{z}}\right)^2 = 1 + \frac{\alpha}{1+\beta\tilde{z}^2} \cdot e^{-\frac{(\tilde{t}-\tilde{z}-\tilde{z}_L)^2}{\tilde{x}_L^2}}.$$

5. Метод «больших частиц» в лазерной физике бесстолкновительного электронного газа. Рассмотрим УРГЯ в формуле (6). Легко видеть, что

$$\varepsilon_0 = \frac{\partial S_0}{\partial t} = \sqrt{m^2 + m_{эф}^2 + p_0^2};$$

$$m_{эф} = \frac{A_0(t-z)\rho_0}{\sqrt{2\rho}} e^{-\frac{r^2}{\rho^2}},$$

где $m_{эф}$ представляет собой эффективную массу, соответствующую энергии осцилляций электрона в поле электромагнитной волны.

Перепишем уравнение (6) в следующем виде

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial t}\right)^2 - (\nabla S_0)^2 = m^2 + m_{эф}^2. \quad (8)$$

Возьмем градиент от левой и правой частей уравнения

$$\begin{aligned} \nabla\left(\frac{\partial S_0}{\partial t}\right)^2 &= 2\left(\frac{\partial S_0}{\partial t}\right)\nabla\left(\frac{\partial S_0}{\partial t}\right) = \\ &= 2\left(\frac{\partial S_0}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\nabla S_0}{\partial t}\right) = -2\varepsilon\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}\right); \\ \nabla(\nabla S_0)^2 &= \nabla(\nabla S_0 \cdot \nabla S_0) = \\ &= 2(\nabla S_0 \cdot \nabla)\nabla S_0 = 2(p_0 \cdot \nabla)p_0, \end{aligned}$$

в результате получим

$$2\varepsilon_0\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}\right) + 2(p_0 \cdot \nabla)p_0 = -\nabla m_{эф}^2.$$

Учтем связь

$$v_0 = \frac{p_0}{\varepsilon_0},$$

поэтому

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}\right) + (v_0 \cdot \nabla)p_0 = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\nabla m_{эф}^2. \quad (9)$$

Уравнение (9), которое получается взятием градиента от выражения (8), есть уравнение переноса усредненного импульса в эйлеровой постановке. В лагранжевой постановке оно выглядит следующим образом:

$$\frac{dp_0}{dt} = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\nabla m_{эф}^2; \quad m_{эф}^2 = \frac{1}{2}(A_x^0)^2. \quad (10)$$

Это есть уравнение дрейфового движения электрона в поле высокочастотной электромагнитной волны. Правая часть в формуле (10) представляет собой выражение для релятивистской пондеромоторной силы. При выталкивании электрона из лазерного пучка градиент отрицательный, поэтому правая часть положительна. К формуле (10) следует добавить уравнение для определения траектории

$$\frac{dr_0}{dt} = v_0; \quad v_0 = \frac{p_0}{\varepsilon_0}. \quad (11)$$

Система уравнений (10)–(11) описывает усредненное (дрейфовое) движение электронного газа в поле лазерного импульса в лагранжевой постановке. Система позволяет решать задачу о движении электронного газа в рамках метода «больших частиц». Здесь «большой частицей» является лагранжевская ячейка электронного газа. В методе «больших частиц» для электронного газа без взаимодействия ячейки перепутываются, т. е. могут проходить друг через друга. Уравнения метода больших частиц с взаимодействием между ними для разреженной двухкомпонентной лазерной плазмы были рассмотрены в статье «Метод взаимодействующих частиц в релятивистской лазерной физике» [2]. Решения задачи в указанной работе не проводилось.

Метод усреднения действия перестанет работать для очень коротких лазерных импульсов, длина которых сравнима с длиной волны излучения:

$$t_L < 10\frac{\lambda}{c} \approx 100\text{фс}.$$

6. Результаты численного решения усредненного релятивистского уравнения Гамильтона–Якоби (УРГЯ). В данной работе приведены результаты численного решения уравнения (8), реализована двухслойная неявная разностная схема типа «крест сверху» (рис. 1).

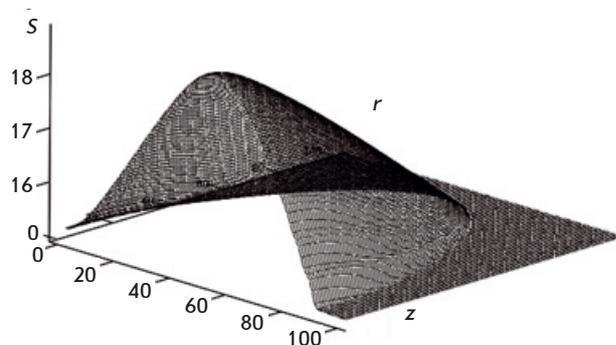


Рис. 1. Функция действия в момент времени $\tilde{t} = 15$

А. V. BOROVSKY, A. L. GALKIN

Решение получено методом простой итерации:

- сетка 100×100 ;
- значение времени $\tilde{t} = 15$;
- параметры лазерного импульса $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $x_L = 5$, $z_L = 10$;
- сетка $h_r = 0,02$; $h_r = 0,1$; $h_z = 0,25$.

При нахождении функции импульса увеличена точность расчета производных. Для этого применена разностная формула Ньютона, согласно которой производная рассчитывается по четырем точкам — две точки слева, две справа. Неявная разностная схема при $t > 10$ дает некоторую шероховатость, которая появляется, когда фронт импульсов становится более крутым и переходит в режим опрокидывания. Для сглаживания решения в задачу вводилась искусственная вязкость согласно [5].

Расчет функции модуль импульса в момент времени $\tilde{t} = 15$ показывает, что распределение импульса на сетке r, z имеет кольцевую форму с ярко выраженным максимумом, а фокальная перетяжка лазерного импульса находится в точке $z = 50$ (рис. 2). Ускорение электронов происходит до больших значений импульсов и энергий, также как и их ускорение назад. Однако эти электроны имеют меньшие значения импульсов и энергий. Максимум импульса возникает под значительным зенитным углом к оси лазерного пучка. В принципе, данные расчеты позволяют определить углы, под которыми должны вылетать наиболее энергичные электроны. Это будет конус, направленный вперед под значительным зенитным углом.

Таким образом, в данной работе из строгого уравнения РГЯ усреднением по периоду лазерного излучения получено уравнение УРГЯ. Такое уравнение описывает дрейфовое движение электрона, на который действует релятивистская пондеромоторная сила. Получено выражение для пондеромоторной силы, возникающей для гауссова пучка. Уравнение УРГЯ справедливо

для импульсов, длинных по сравнению с длиной волны излучения. Строгое уравнение РГЯ следует использовать для импульсов, длина которых сравнима с длиной волны излучения. Рассмотрен переход для уравнения УРГЯ от эйлеровой к лагранжевой постановке. При этом получено выражение для релятивистской пондеромоторной силы, действующей на электрон в поле лазерного импульса.

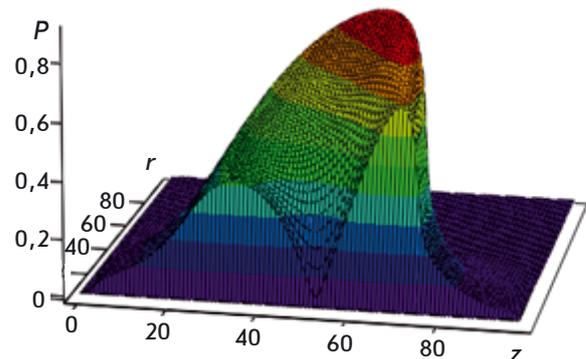


Рис. 2. Функция модуль импульса в момент времени $\tilde{t} = 15$

Проведено численное исследование уравнения УРГЯ в эйлеровой постановке. Решалась T2D задача. Находились функция действия $S(t, r)$ и функция $P(t, r)$ равная модулю вектора импульса. Решение получено при помощи двухслойной неявной разностной схемы типа «крест сверху». Производные рассчитывались при помощи разностных формул Ньютона, повышенной точности, известных в вычислительной математике. В расчеты вводилась искусственная вязкость согласно рекомендациям книги А. А. Самарского и Ю. П. Попова.

Расчеты показывают, что в фокусе длинного гауссова лазерного импульса горячие электроны выбрасываются в широкий конус в основном под большими углами к оси лазерного импульса.

Список использованной литературы

1. Боровский А. В. Высокочастотная восприимчивость газа анизотропно поляризуемых дипольных молекул / А. В. Боровский, В. В. Коробкин, Ч. К. Мухтаров // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1991. — Т. 99, вып. 3. — С. 715–720.
2. Боровский А. В. Метод взаимодействующих частиц в релятивистской лазерной физике / А. В. Боровский, П. А. Мотовин // Применение математических методов и информационных технологий : сб. науч. тр. — Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2011. — Вып. 10. — С. 34–39.
3. Боровский А. В. Математические модели, основанные на релятивистском уравнении Гамильтона–Якоби в лазерной физике / А. В. Боровский, А. Л. Галкин // Известия Иркутской государственной экономической академии. — 2015. — Т. 25, № 1. — С. 122–129. — DOI : [10.17150/1993-3541.2015.25\(1\).141-148](https://doi.org/10.17150/1993-3541.2015.25(1).141-148).
4. Ландау Л. Д. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Наука, 1973. — 208 с.
5. Самарский А. А. Разностные методы решения задач газовой динамики / А. А. Самарский, Ю. П. Попов. — М. : Наука, 1980. — 352 с.

6. Quesnel B. Theory and simulation of the interaction of ultraintense laser pulses with electrons in vacuum / B. Quesnel, P. Mora // *Physical Review*. — 1998. — Vol. 58, № 3. — P. 371.

References

1. Borovskii A. V., Korobkin V. V., Mukhtarov Ch. K. High-sensitivity susceptibility of gas to anisotropic polarized dipole molecules. *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki = Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1991, vol. 99, iss. 3, pp. 715–720. (In Russian).
2. Borovskii A. V., Mutovin P. A. The method of interacting particles in the relativistic laser physics. *Primenenie matematicheskikh metodov i informatsionnykh tekhnologii [Mathematical methods and information technologies application in economics]*. Irkutsk, Baikal State University Economics and Law Publ., 2011, iss. 10, pp. 34–39. (In Russian).
3. Borovskii A. V., Galkin A. L. Mathematical models based on the relativistic Hamilton-Jacobi equation in laser physics. *Izvestiya Irkutskoy gosudarstvennoy ekonomicheskoy akademii = Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy*, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 122–129. DOI : [10.17150/1993-3541.2015.25\(1\).141-148](https://doi.org/10.17150/1993-3541.2015.25(1).141-148). (In Russian).
4. Landau L. D., Lifshits E. M. *Mekhanika [Mechanics]*. Moscow, Nauka Publ., 1973. 208 p.
5. Samarskii A. A., Popov Yu. P. *Raznostnye metody resheniya zadach gazovoi dinamiki [Difference methods for solving gas dynamics problems]*. Moscow, Nauka Publ., 1980. 352 p.
6. Quesnel B. and Mora P. Theory and simulation of the interaction of ultraintense laser pulses with electrons in vacuum. *Physical Review*, 1998, vol. 58, no. 3, p. 371.

Информация об авторах

Боровский Андрей Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра информатики и кибернетики, Байкальский государственный университет экономики и права, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Галкин Андрей Леонидович — доктор физико-математических наук, заведующий сектором, Институт общей физики РАН им. А. М. Прохорова, 119991, г. Москва, ул. Вавилова, 38, e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.

Библиографическое описание статьи

Боровский А. В. Численное моделирование ускорения электронов в фокусе ультракороткого лазерного импульса с применением усредненно-релятивистского уравнения Гамильтона–Якоби / А. В. Боровский, А. Л. Галкин // *Известия Иркутской государственной экономической академии*. — 2015. — Т. 25, № 3. — С. 526–532. — DOI : [10.17150/1993-3541.2015.25\(3\).526-532](https://doi.org/10.17150/1993-3541.2015.25(3).526-532).

Authors

Andrei V. Borovsky — Doctor habil. (Physical and Mathematical Sciences), Professor, Baikal State University of Economics and Law, 11 Lenin St., 664003, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Andrei L. Galkin — Doctor habil. (Physical and Mathematical Sciences), Professor, General Physics Institute of RAS n.a. A.M. Prokhorov, 38 Vavilova St., 119991, Moscow, Russian Federation, e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.

Reference to article

Borovsky A. V., Galkin A. L. Numerical simulation of electrons acceleration in the focus of an ultrashort laser pulse with the averaged relativistic Hamilton–Jacobi equation use. *Izvestiya Irkutskoy gosudarstvennoy ekonomicheskoy akademii = Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy*, 2015, vol. 25, no. 3, pp. 526–532. DOI: [10.17150/1993-3541.2015.25\(3\).526-532](https://doi.org/10.17150/1993-3541.2015.25(3).526-532). (In Russian).